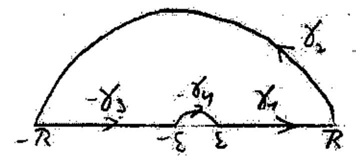
פתרון תרגיל 7-8 ג׳יסועות תורת הפונקציות המרוכבות

1. האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$



נבחר γ המסילה:

$\gamma_2, \gamma_4 : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ $\quad \gamma_2(t) = Re^{it}$ $\quad \gamma_4(t) = \varepsilon e^{it}$ אזי

$\gamma_3 : [-R,-\varepsilon] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1 : [\varepsilon, R] \to \mathbb{C}$ $\quad \gamma_1(t) = t$, $\gamma_3(t) = t$

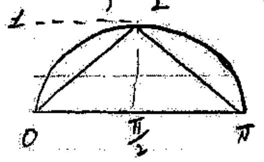
$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} - \int_{\gamma_4}\right)\frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

על γ_2:

$$\left|\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{z}dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{\cancel{Re^{it}}}\, i\cancel{Re^{it}}\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_0^\pi e^{iRe^{it}}dt\right| \le \int_0^\pi e^{-R\sin t}\cdot \overbrace{|e^{iR\cos t}|}^{1}dt = \int_0^\pi e^{-R\sin t}dt \le$$

בין 0 ל-$\frac{\pi}{2}$ $\sin t \ge \frac{2}{\pi}t$, בין $\frac{\pi}{2}$ ל-π $\sin t \ge 2 - \frac{2}{\pi}t$

(כי ) לכן

$$\le \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}t}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-2R}e^{\frac{2R}{\pi}t}dt =$$

$$= -\frac{\pi}{2R}e^{-\frac{2R}{\pi}t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + e^{-2R}\cdot\frac{\pi}{2R}e^{\frac{2R}{\pi}t}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{2R}\left[-(e^{-R}-1) + e^{-2R}(e^{2R}-e^{R})\right] = \frac{\pi}{R}(1-e^{-R}) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

על γ_4:

$$\int_{\gamma_4}\frac{e^{iz}}{z}dz = \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\cancel{\varepsilon e^{it}}}\, i\cancel{\varepsilon e^{it}}\,dt = i\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}}$$

נראה כי $e^{i\varepsilon e^{it}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{במ"ש}} 1$ ולכן, אם נסמן $u(t) = ie^{it}$

אזי $|u(t)| = 1$ לכל t ולכן:

$$|e^{\varepsilon u} - 1| = \left|1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n u^n}{n!} - 1\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\underbrace{|u^n|}_{1} = e^{\varepsilon} - 1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

בלתי תלוי ב-t, לכן ההתכנסות במ"ש ולכן

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_4}\frac{e^{iz}}{z}dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\pi ie^{i\varepsilon e^{it}}dt = i\int_0^\pi \lim_{\varepsilon\to 0}e^{i\varepsilon e^{it}}dt =$$

$$= i\int_0^\pi dt = i\pi$$

לכן

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it}}{t}dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left(\int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_1}\right)\frac{e^{iz}}{z}dz = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} 0 + \int_{\gamma_4} - \int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{z}dz =$$

$$= i\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it}}{t}dt = \mathrm{Im}\, i\pi = \pi$$

2. תהא f פונקציה שלמה, נציג $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$

(א) נתון כי $|f'(z)|\le M(1+\sqrt{|z|})$ אזי, לכל R (מתקיים):

$$\left.\begin{aligned}&|na_n|=\left|n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|=\left|\frac{n}{n}\frac{(f')^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f'(z)}{z^{n-1+1}}dz\right|\le\\&\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(Re^{it})}{R^n e^{int}}iRe^{it}\right|dt=\frac{1}{2\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi}|f'(Re^{it})|dt\overset{\text{נתון}}{\le}\\&\le\frac{1}{2\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi}M(1+\sqrt{R})dt=\frac{M(1+\sqrt{R})}{R^{n-1}}\xrightarrow[R\to\infty]{n\ge2}0\end{aligned}\right\}\ \text{לכל } R$$

לכן לכל $n\ge2$, $a_n=0$. לכן $\underline{f(z)=a_0+a_1z}$

לכל שני קבועים $a_0,a_1\in\mathbb{C}$, המקיימים את הנתון)

(ב) נתון כי $|f'(z)|\le M(1+|z|)$, במקרה זה,

$$|na_n|\le\frac{1}{2\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi}|f'(Re^{it})|dt\le\frac{1}{2\pi R^{n-1}}\int_0^{2\pi}M(1+R)dt=$$

$$=\frac{M(1+R)}{R^{n-1}}\xrightarrow[R\to\infty]{n\ge3}0\quad,\quad n=2\Rightarrow\frac{M}{R}+M\xrightarrow[R\to\infty]{}M$$

לכן לכל $n\ge3$, $a_n=0$ לכן $\underline{f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2}$

(כאשר $|a_2|\le\frac{1}{2}M$ וכו')

(ג) נתון כי $|f(z)|\le M(1+|z|)$ אזי:

$$|a_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{it})}{R^{n+1}e^{i(n+1)t}}iRe^{it}dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}|f(Re^{it})|dt\le\frac{1}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}M(1+R)dt=\frac{M(1+R)}{R^n}\xrightarrow[R\to\infty]{n\ge2}0$$

לכן $\underline{f(z)=a_0+a_1z}$ (a_0,a_1 מתאימים לנתון)

3. (א)

$$\cos z\cdot\cosh z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})(e^z+e^{-z})\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{4}(e^{iz+z}+e^{z-iz}+e^{iz-z}+e^{-iz-z})=$$

$$=\underline{\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)^n+(1-i)^n+(-1+i)^n+(-1-i)^n]z^n}$$

(ב) ידוע כי $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}z^{2n}$

כמו כן, $(\arcsin z)'=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ לכן $\arcsin z=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$

אזי $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}z^{2n}$

$$\Rightarrow na_n=\begin{cases}(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k} & n-1=2k\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}\qquad a_0=\arcsin 0=0$$

$$\Rightarrow a_n=\begin{cases}\frac{1}{2k+1}(-1)^k\binom{-\frac{1}{2}}{k} & n=2k+1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$\underline{(a+z)^{\alpha} = \frac{1}{a^{\alpha}}(1+\frac{z}{a})^{\alpha} = a^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}a^{-n}z^{n}}$ $\quad a\neq 0$ (ד)

4. האם קיימת פונקציה אנליטית ב-D כך שלכל $z\in D$ מתקיים $|f(z)| = e^{|z|}$?

נניח ש-f כזו. אזי f לא מתאפסת ב-D (שכן $|f(z)|=e^{|z|}>0$ לכל z) לכן $\frac{1}{f}$ אנליטית ב-D וכן לכל $z\in D$, $|\frac{1}{f(z)}|=e^{-|z|}\le 1$. מצד שני, $|\frac{1}{f(0)}|=e^{0}=1$ לכן $\frac{1}{f}$ משיגה את המקסימום ב-D ולכן, לפי עקרון המקסימום, $\frac{1}{f}$ קבועה לכן f קבועה, אבל פונקציה קבועה לא יכולה לקיים $|f(z)|=e^{|z|}$, ולכן <u>לא קיימת f כזו</u>.

5. הוכח שפונקציה שלמה לא קבועה צפופה ב-$\mathbb{C}$,

הגדרה: $A\subseteq\mathbb{C}$ נקראת צפופה אם לכל $z\in\mathbb{C}$ ולכל $r>0$ $A\cap B_r(z)\neq\emptyset$ (כאשר $B_r(z)=\{w:|z-w|<r\}$)

נניח בשלילה ש-f שלמה והתמונה של f אינה צפופה, כלומר קיים $z_0\in\mathbb{C}$ ו-$r>0$ כך ש $f(\mathbb{C})\cap B_r(z_0)=\emptyset$

לכן לכל $z\in\mathbb{C}$, $r\le|f(z)-z_0|$ ולכן $\frac{1}{r}\ge\left|\frac{1}{f(z)-z_0}\right|$

אבל $f(z)-z_0$ פונקציה שלמה ולא מתאפסת (כי z_0 לא בתמונת f) לכן $\frac{1}{f(z)-z_0}$ שלמה וחסומה לכן, לפי משפט ליוביל, $\frac{1}{f(z)-z_0}=c$ קבועה לכן $\underline{f(z)=\frac{1}{c}+z_0}$ <u>קבועה</u>, בסתירה להנחה.

6. f שלמה ומקיימת $Re f(z)\le M$ לכל z עבור $M\in\mathbb{R}$

כלהו. f שלמה $\Rightarrow$ e^{f} שלמה (בהרכבה של שלמות)

וכן $|e^{f(z)}|=|e^{Re f(z)}|\underbrace{|e^{i Im f(z)}|}_{1}=e^{Re f(z)}\le e^{M}$

לכן e^{f} שלמה וחסומה, לכן, לפי משפט ליוביל e^{f} קבועה, $e^{f}=c$ ולכן $f=\ln c$, <u>כלומר f קבועה</u>.

7. f שלמה, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z_0)(z-z_0)^n$ פיתוח טיילור סביב כל $z_0\in\mathbb{C}$. נניח שלכל $z_0\in\mathbb{C}$ קיים n כך ש $c_n(z_0)=0$.

נניח בשלילה שלכל n, c_n הם לא זהותית 0, $c_n(z_0)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

f שלמה $\Leftarrow$ c_n שלמה לכל n, לפי משפט האפסים של

פונקציה אנליטית, מכיוון ש $c_n \neq 0$, $\aleph_0 \geq |\{z\in\mathbb{C} : c_n(z)=0\}|$

לכן $|\{z\in\mathbb{C} :\ \exists n\in\mathbb{N}\ \ c_n(z)=0\}| \leq \aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0$

אבל נתון שלכל $z\in\mathbb{C}$ קיים n כך ש $c_n(z)=0$ לכן

$$2^{\aleph_0} = |\mathbb{C}| = |\{z :\ \exists n\in\mathbb{N}\ \ c_n(z)=0\}| \leq \aleph_0$$

סתירה, לכן <u>f פולינום</u>